

Unidad N° 6

Tensiones Cortantes en Vigas

6.1. Objetivos

Al terminar el estudio de esta unidad usted deberá ser capaz de resolver los siguientes objetivos trazados para el Estudio de tensiones cortantes en secciones de viga.

- Calcular las Tensiones Cortantes inducidos por la presencia de fuerzas verticales en cualquier punto de una viga.
- Dibujar la distribución de tensiones cortantes en cualquier sección transversal de una viga.
- Dimensionar cualquier sección de viga transversal capaz de soportar las tensiones cortantes inducidos por la presencia de fuerzas verticales.
- Determinar la capacidad de carga que puede resistir cualquier sección transversal de viga.

6.2. Introducción

En la anterior unidad estudiamos que cuando las cargas flexionan a la viga, estas en su interior producen momentos flectores y fuerzas cortantes en la sección trasversal que son los que mantienen el equilibrio el sistema.

El objetivo principal de esta unidad es establecer la relación que existe entre las fuerzas verticales que actúa en la sección transversal y la distribución de tensiones cortantes que se producen en ella, basándonos en las mismas suposiciones realizadas en la unidad anterior respecto a los materiales que se compone la viga.

En conclusión. **El corte en vigas estudia los esfuerzos internos de corte originados por la presencia de fuerzas verticales en la sección transversal de viga. A estos esfuerzos internos de corte se los denomina Tensiones cortantes en vigas.**

Ing. Elias Belmonte C.

6.3. Formulación

Supongamos una viga simplemente apoyada de sección recta sometida a flexión, donde la carga externa es cualquiera produciendo momentos flectores y fuerzas verticales en el interior de la viga de tal forma que pueda equilibrarse el sistema como muestra los diagramas a continuación:

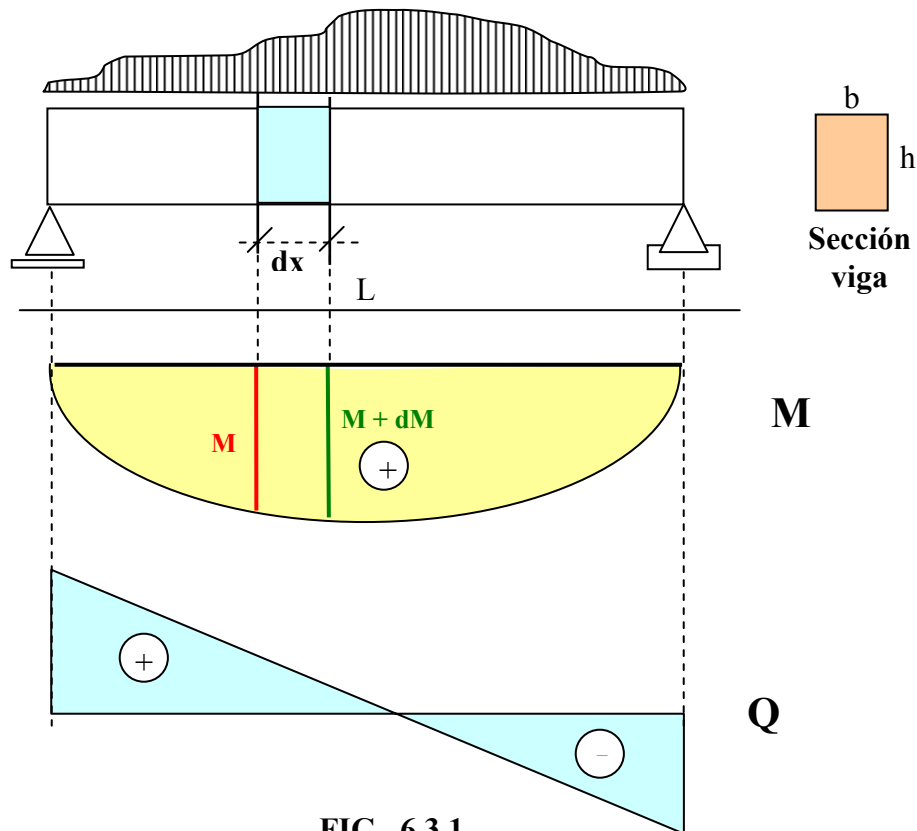
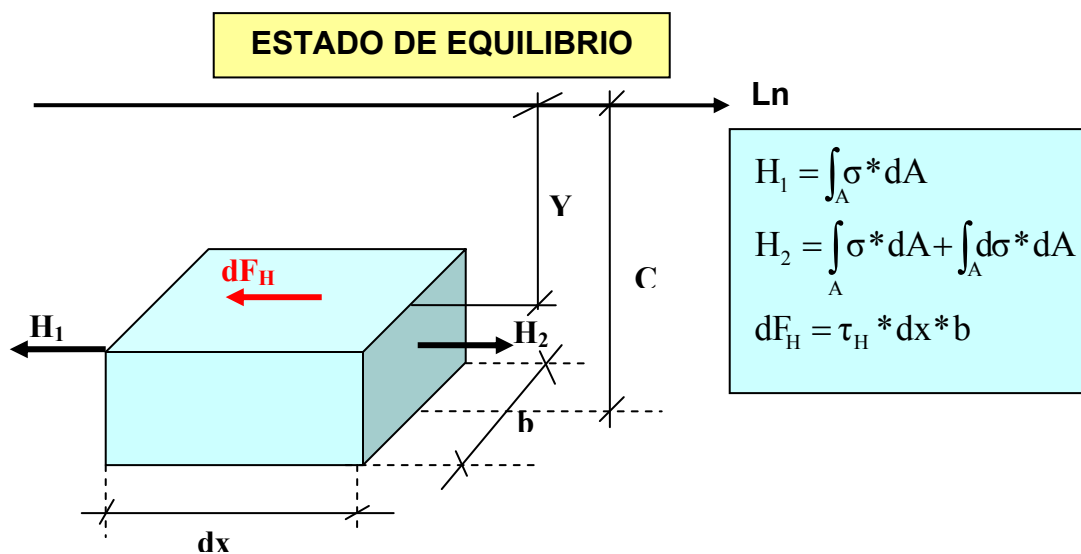
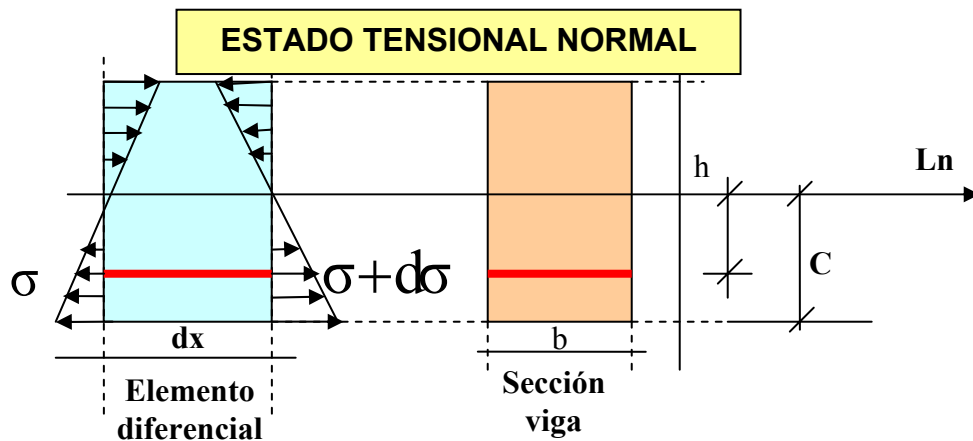
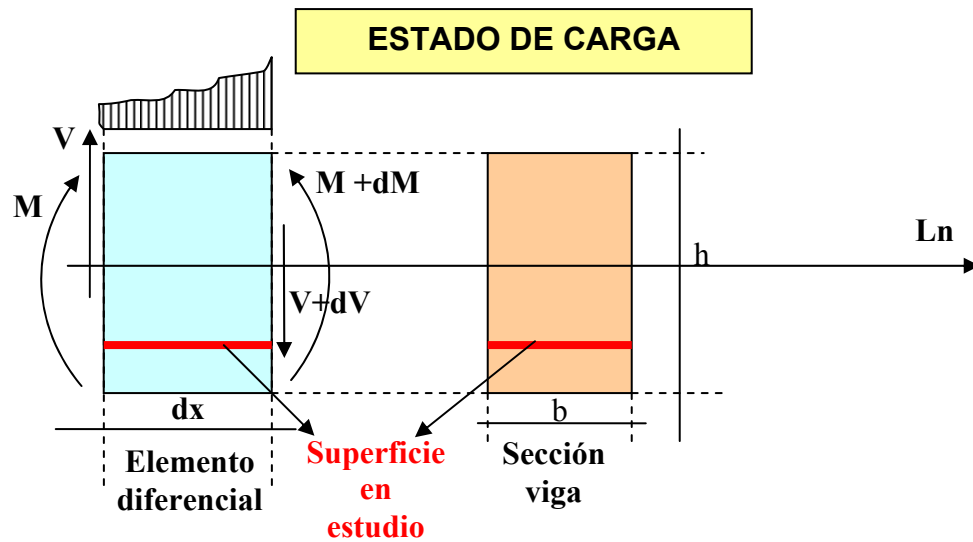
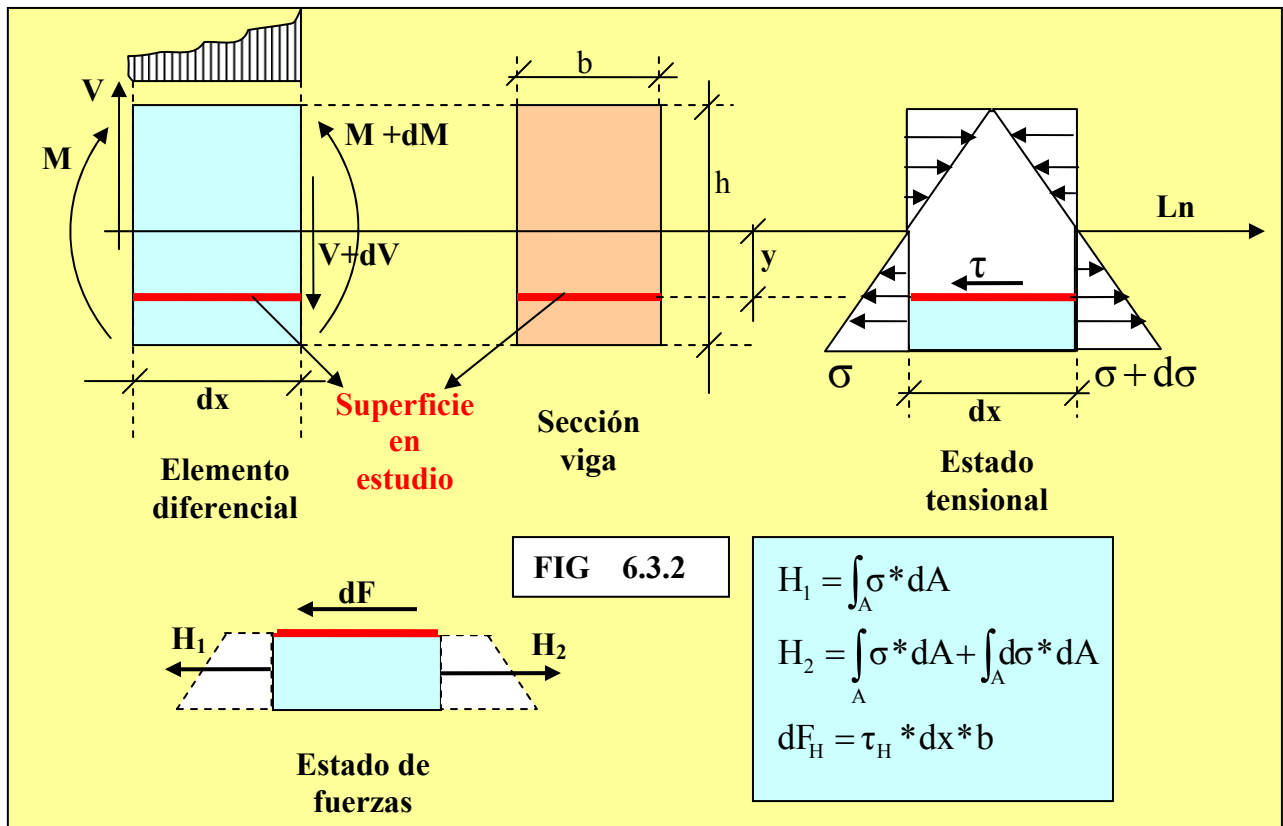


FIG 6.3.1.

Lo que queremos encontrar es una relación que nos vincule las fuerzas verticales de corte que se produce en cualquier sección transversal, con sus respectivas respuesta interna de tensiones cortantes verticales. Tomemos el mismo elemento diferencial y superficie de estudio de la viga de la unidad anterior, debido a la existencia de fuerzas verticales es que el diagrama de momentos flectores no es constante, Produciendo en el elemento un desequilibrio que debe ser absorbido internamente por fuerzas de corte horizontal, para demostrar cortemos el elemento diferencia mediante la superficie de estudio y realicemos el equilibrio de fuerzas horizontales

Ing. Elias Belmonte C.





quedando la ecuación:

$$\tau_H = \frac{V * M_e}{b * I_{Ln}}$$

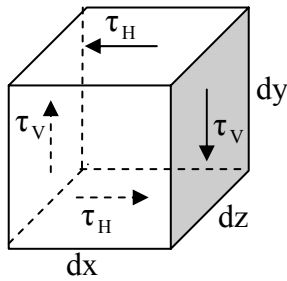
**ECUACION DE TENSION CORTANTE
HORIZONTAL EN VIGAS
ECC. 6.1**

reemplazando tenemos:

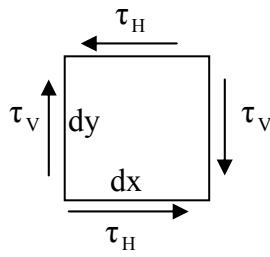
6.3.1. Relación entre la tensión cortante horizontal y vertical

Habrá quien se sorprenda al ver al ver que el termino fuerza cortante vertical (V) aparece en la ecuación de tensión de corte horizontal τ_H . Sin embargo como veremos ahora, **una tensión cortante horizontal va siempre acompañada de otra tensión cortante vertical de la misma magnitud pero de sentido contrario**. Para demostrar ello supongamos un elemento diferencial cualquiera de la viga donde se representen las tensiones de corte horizontal y vertical y realicemos el equilibrio respectivo. Ver figura.

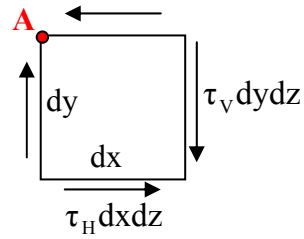
Ing. Elias Belmonte C.



(a) Elemento diferencial



(b) Tensiones



(c) Fuerzas

$$\sum M_A = 0$$

$$(\tau_V dydz)dx - (\tau_H dx dz)dy = 0$$

Simplificando tenemos:

$$\tau_H = \tau_V \quad \text{l.q.q.d.}$$

Por consecuencia la expresión que gobierna las tensiones de corte vertical viene dada por:

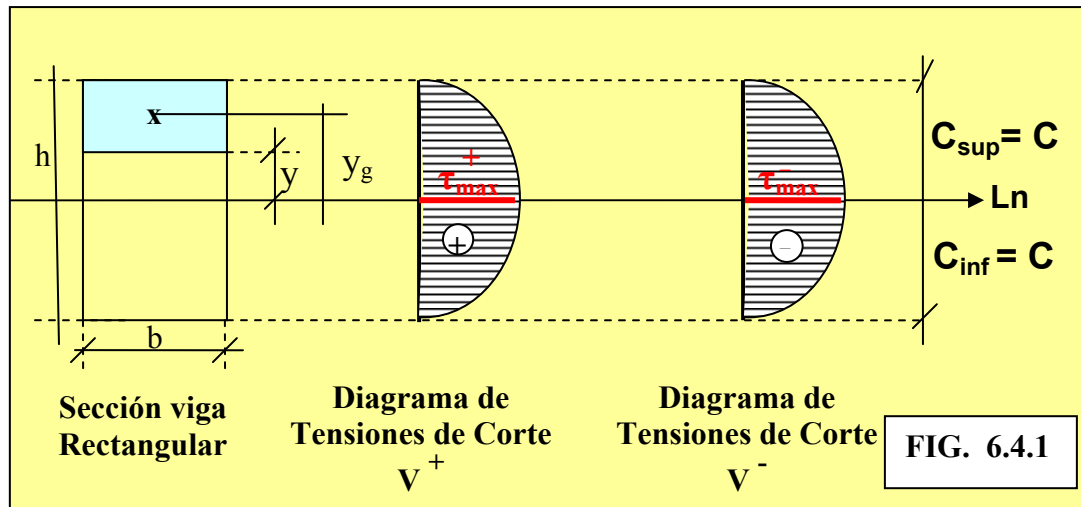
$$\tau_V = \frac{V * M_e}{b * I_{Ln}}$$

**ECUACION DE TENSION CORTANTE
VERTICAL EN VIGAS
ECC. 6.2**

6.4. Construcción del diagrama de tensiones

6.4.1. Secciones simétricas, $b = \text{constante}$

Son aquellas secciones simétricas respecto a la línea neutra que coincide con el centro de gravedad de la sección, y cuyas tensiones de corte varían siguiendo una ecuación cuadrática en función de la variación del momento estático, ya que las otras variables de la expresión son constantes, como veremos a continuación:



de las expresiones 6.1. y 6.2. tenemos: $\tau_v = \frac{V * M_e}{b * I_{Ln}}$

donde:

- $C_{inf} = C_{sup} = C$ C = Fibra de la sección mas alejada de la Ln .
- V, b, I_{Ln} = Constantes

- $M_e = \text{Variable} = A * y_g = \underbrace{\left[b * \left(\frac{h}{2} - y \right) \right]}_A * \underbrace{\left[y + \frac{\left(\frac{h}{2} - y \right)}{2} \right]}_{y_g} = \frac{b}{2} * \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$

reemplazando

$$\tau_v = \underbrace{\frac{V}{b * I_{Ln}}}_{\text{Const.}} * \underbrace{\frac{b}{2} * \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]}_{\text{Variable}}$$

como vemos la expresión varia de forma cuadrática, entonces tenemos:

Para $y = h/2 \longrightarrow \tau_v = 0$

Para $y = 0 \longrightarrow \tau_v = \tau_{max}$

Lo que da como resultado el diagrama mostrado en el grafico, el signo del diagrama de tensiones de corte lo define el signo del diagrama de fuerzas cortantes.

Ing. Elías Belmonte C.

Sabiendo la inercia en la “Ln”, tenemos para la sección rectangular mostrada que el corte máximo es el siguiente:

$$I_{Ln} = \frac{b * h^3}{12} \quad \text{reemplazando tenemos} \quad \tau_v = \frac{V}{b * \frac{bh^3}{12}} * \frac{b}{2} * \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

simplificando y reemplazando $y = 0$ tenemos: $\tau_{\max} = \frac{3}{2} * \frac{V}{bh}$

si $A = bh$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} * \frac{V}{A}$$

ECC. 6.3

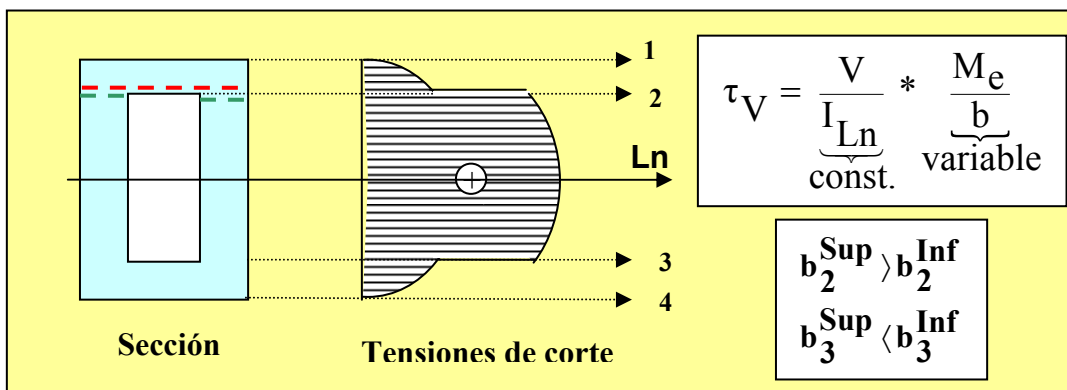
**Tensión de corte
máximo para secciones
rectangulares**

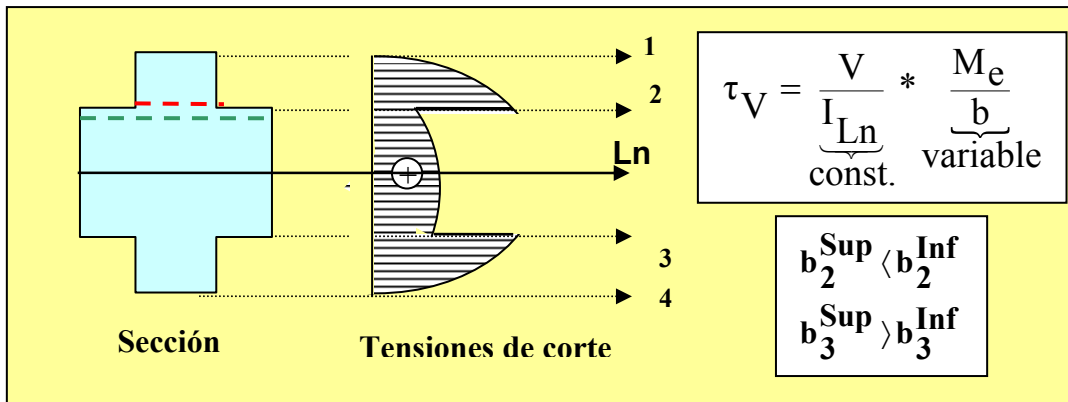
6.4.2. Secciones simétricas, $b = \text{variable}$

Son aquellas secciones simétricas respecto a la línea neutra que coincide con el centro de gravedad de la sección, y cuya variación de las tensiones de corte son simétricas respecto a la “Ln” y ocasionadas por dos factores:

- Momento estático (M_e).- Que es la variable que ocasiona la variación cuadrática del diagrama.
- Bases (b).- Que es la variable que ocasiona variaciones bruscas en el diagrama.

Los otros dos factores que intervienen como ser la inercia y la fuerza de corte son constantes, veamos a continuación dos ejemplos:

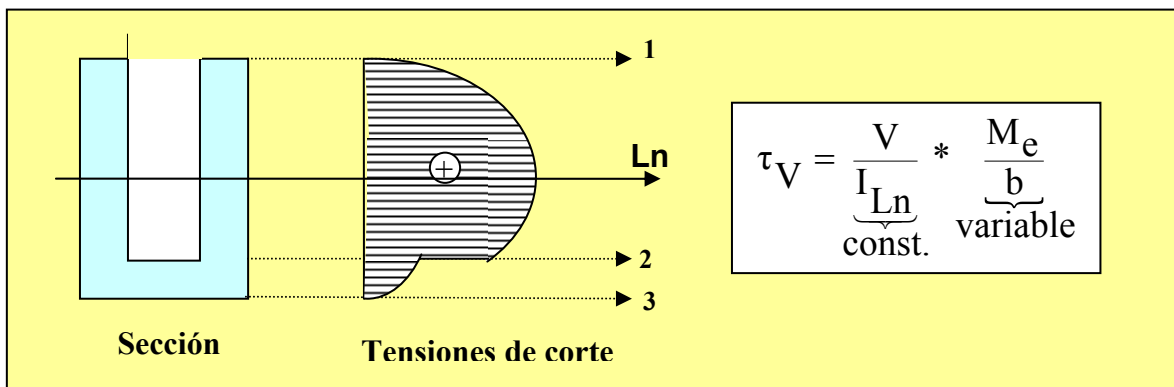


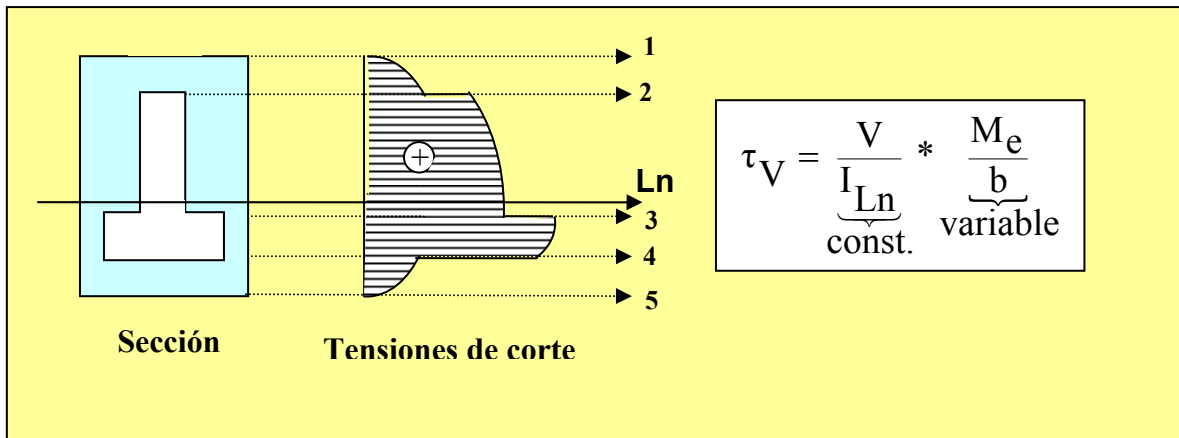


Como vemos en los dos ejemplos el diagrama lo define una curva cuadrática debido a la variación del momento estático, existiendo variaciones bruscas debido al cambio brusco de las bases de la sección que se presentan en los ejes 2 y 3. Representadas en la figura por rectas segmentadas (base 2 superior segmento rojo, base 2 inferior segmento verde).

6.4.2. Secciones asimétricas, $b = \text{variable}$

Son aquellas secciones asimétricas respecto a la línea neutra que coincide con el centro de gravedad de la sección, y cuya variación de las tensiones de corte son asimétricas respecto a la “Ln” y ocasionadas por los mismos factores que el inciso anterior. Veamos a continuación dos ejemplos:

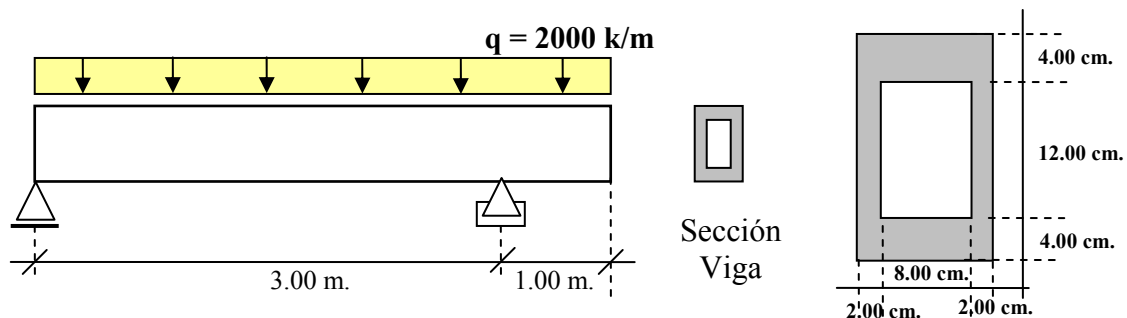




Como vemos en los dos ejemplos el diagrama lo define una curva cuadrática debido a la variación del momento estático, la cual crece desde los extremos superior y inferior hacia la línea neutra, existiendo variaciones bruscas debido al cambio brusco de las distintas bases que se presentan en la sección.

Ejemplo 1

Sea la viga mostrada en la Fig. Determinar el diagrama de tensiones de corte en la sección de máxima sollicitación, además determinar el cote máximo.

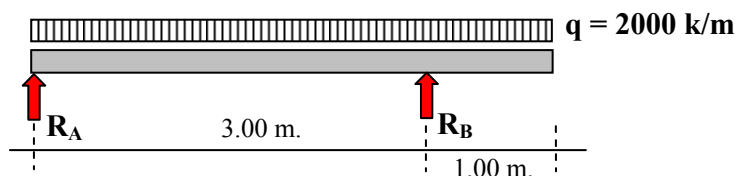


Solución:

$$\tau = \frac{V_{\max} * M_e}{I_{Ln} * b} \quad (6.2.)$$

a) **Calculo de Fuerza vertical máxima (V_{\max})**

• **Calculo de reacciones**



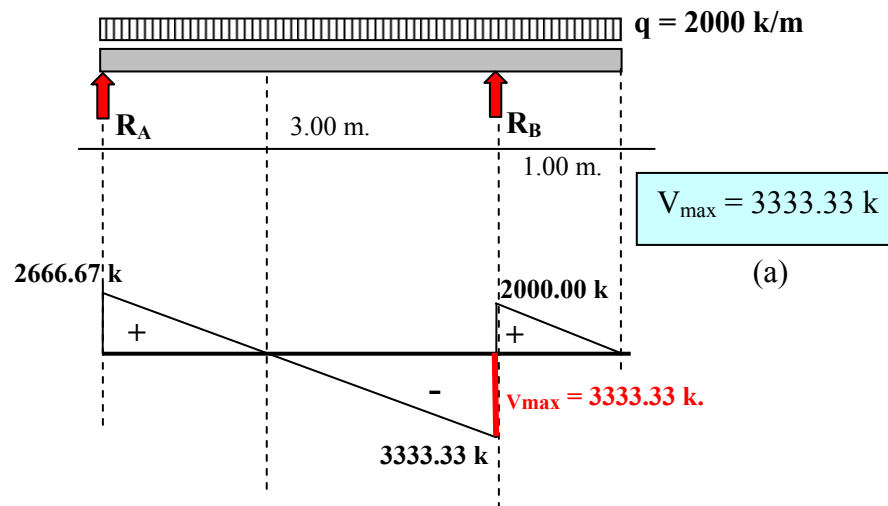
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2000 * 4 * 2 - R_B * 3 = 0$$

$$R_B = 5333.33 \text{ k}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 5333.33 - 2000 * 4 + R_A = 0$$

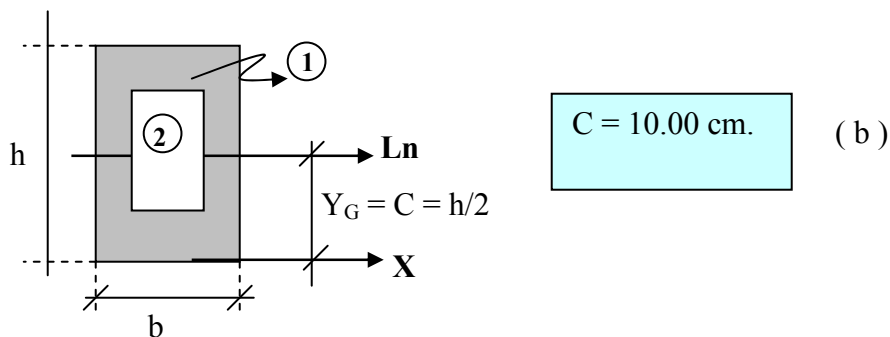
$$R_A = 2666.67 \text{ k}$$

• Diagramas Q



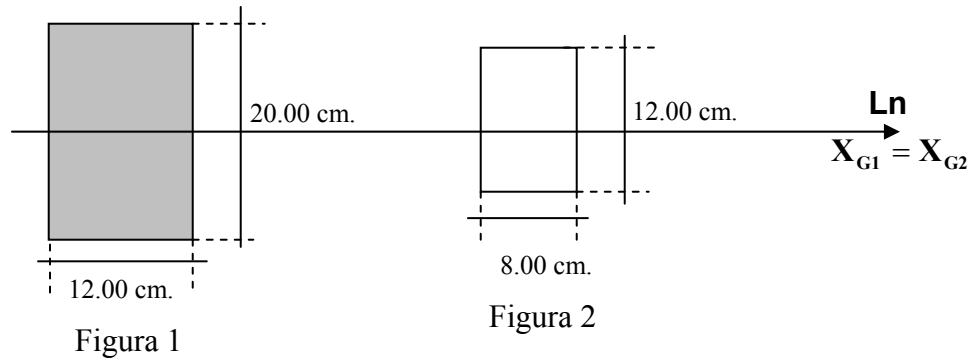
b) Ubicación de la línea neutra

Por ser sección simétrica coincide con la mitad de la sección ósea:



c) Inercia en la línea neutra

Como coincide el baricentro de las figuras 1 y 2 con la línea neutra tenemos que:



$$I_{Ln} = I_1 - I_2 = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{12 * 20^3}{12} - \frac{8 * 12^3}{12}$$

$$I_{Ln} = 6848.00 \text{ cm}^4$$

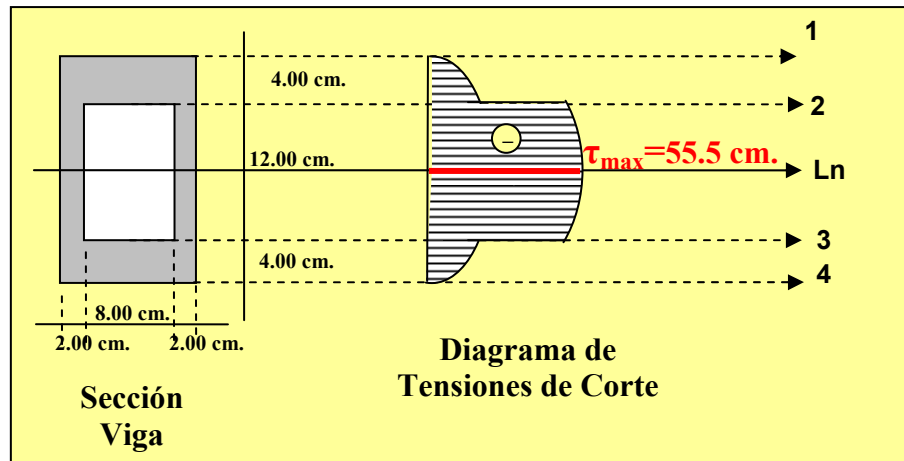
(c)

d) Diagrama de tensiones de corte en la sección de máxima sollicitación

Remplazando (a), (c) en la expresión 7.3. tenemos:

$$\tau_V = \underbrace{\frac{V}{I_{Ln}}}_{\text{const.}} * \underbrace{\frac{M_e}{b}}_{\text{variable}} = 0.4868 * \frac{M_e}{b}$$

como vemos estamos en el caso de sección simétrica con $b = \text{variable}$. Dibujemos la sección y en cada cambio de base creemos un eje.

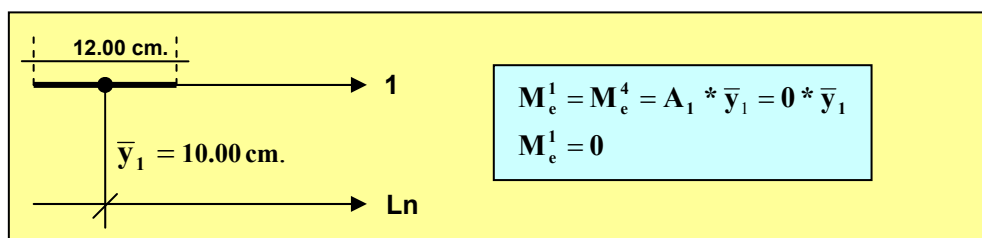


- Cuadro de calculo

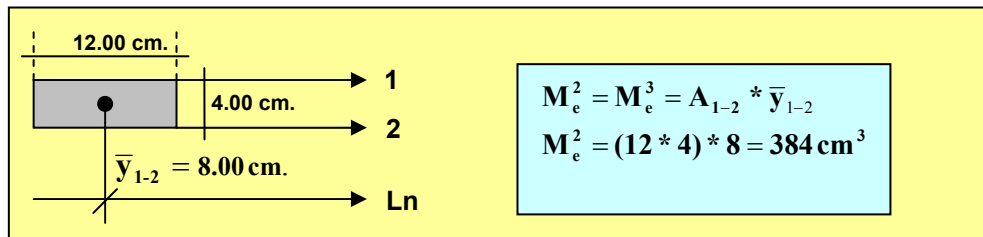
Sección	Const	b	M _e	τ
1	0.4868	12.00	0.00	0.00
2 _{sup}	0.4868	12.00	384.00	15.58
2 _{inf}	0.4868	4.00	384.00	46.73
Ln	0.4868	4.00	456.00	55.50
3 _{sup}	0.4868	4.00	384.00	46.73
3 _{inf}	0.4868	12.00	384.00	15.58
4	0.4868	12.00	0.00	0.00

- Calculo de momentos estáticos

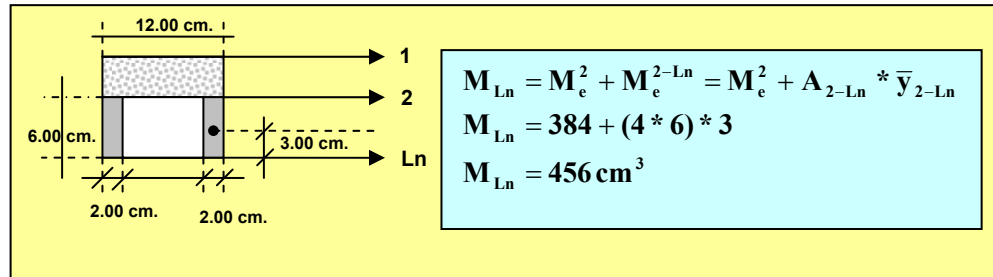
- Sección 1



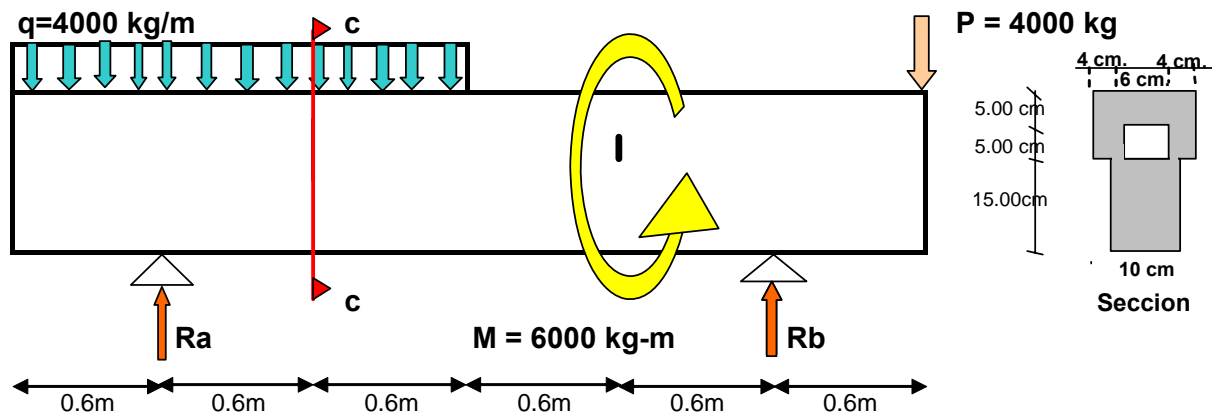
• Sección 2



• Sección Ln

**Ejemplo 2**

Sea la viga mostrada en la figura. Determinar para la sección c-c los diagramas de tensión cortante y tensión normal

**Solucion**

1. Calculo de solicitaciones en la seccion c -c

1.1. Calculo de reacciones

$$\sum M_a = 0$$

$$q \times 1.8 \times 0.3 - M + p \times 3.0 - R_b \times 2.4 = 0$$

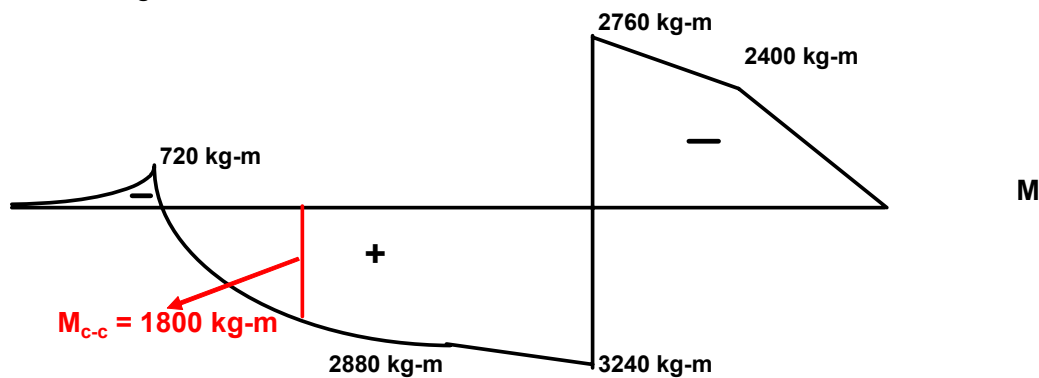
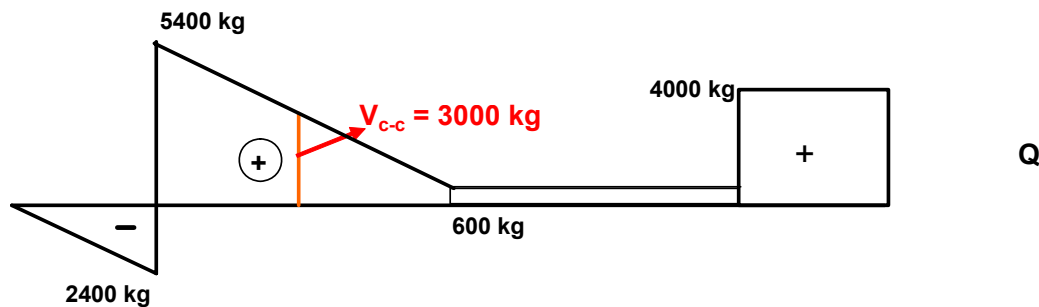
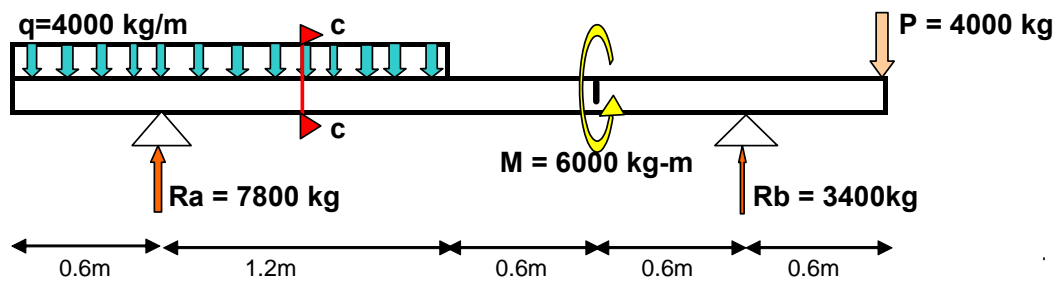
$$\sum V = 0$$

$$R_a + R_b - q \times 1.8 + p = 0$$

$$\longrightarrow R_b = 3400 \text{ kg} \quad \uparrow$$

$$\longrightarrow R_a = 7800 \text{ kg} \quad \uparrow$$

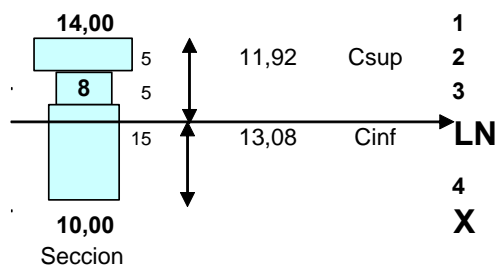
1.2. Diagramas M y Q



$$V_{c-c} = -q \times 1.2 + R_a = 3000 \text{ kg}$$

$$M_{c-c} = -q \times 1.2 \times 0.6 + R_a \times 0.6 = 1800.00 \text{ kg-m}$$

2, Ubicación línea neutra



$$C_{inf} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$C_{inf} = 13,08 \text{ cm}$$

$$C_{sup} = 11,92 \text{ cm}$$

Ing. Elías Belmonte C.

Areas	h	b	Yi	Ai	Igi	ji=(Cinf - Y	Ini
F1	15,00	10,00	7,50	150,00	2812,50	5,58	7477,81
F2	5,00	8,00	17,50	40,00	83,33	-4,42	865,88
F3	5,00	14,00	22,50	70,00	145,83	-9,42	6361,44
	25,00			260,00			14705,13

3 Calculo de inercia en la linea neutra

$$I_{nT} = I_{n1} + I_{n2} + I_{n3}$$

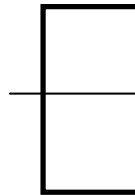
$$\text{Steinner } I_{ni} = I_{gi} + A_i d_i^2$$

$$I_{n1} = 7477,81$$

$$I_{n2} = 865,88$$

$$I_{n3} = 6361,44$$

$$I_{nt} = 14705,13$$



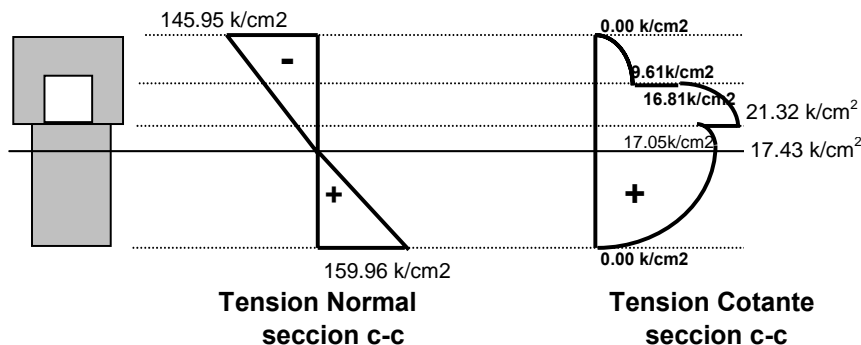
Inercia baricentrica del rectangulo
 $I_g = bh^3/12$

4. Calculo de Tensiones

$$\sigma = \frac{M_{c-c} C_i}{I_{nt}} \quad \text{Tension normal}$$

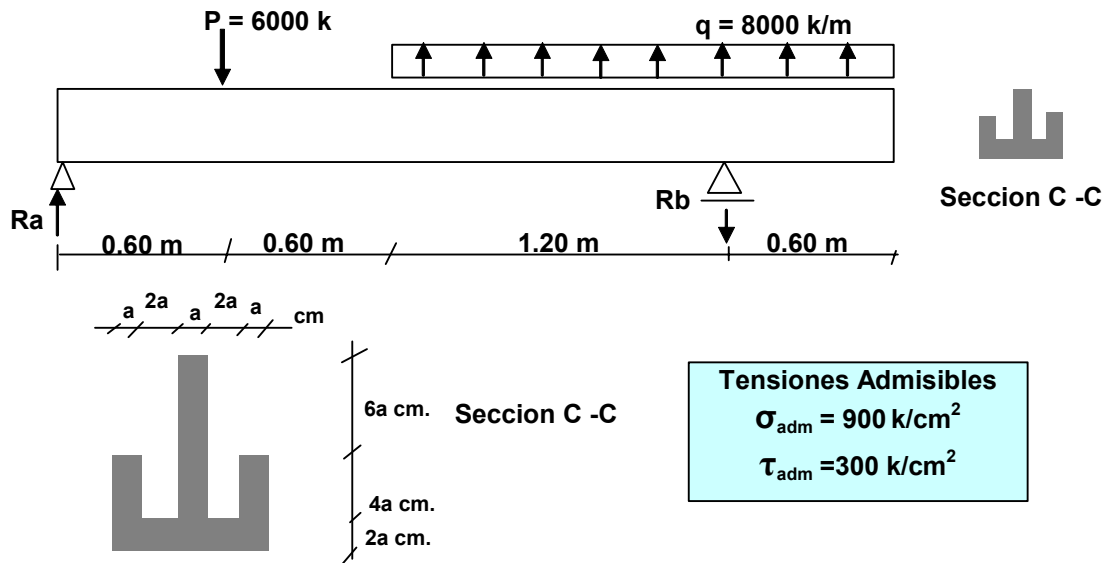
$$\tau = \frac{V_{c-c} M_e}{b_i I_{nt}} \quad \text{Tension cortante}$$

Seccion c-c	M_{c-c} k-m	C_i cm	I_{nt} cm ⁴	σ_{c-c} k/cm ²	V k	M_e cm ³	b cm	τ_{c-c} k/cm ²
1	1800,00	11,92	14705,13	-145,95	3000,00	0,00	14,00	0,00
2s	1800,00	6,92	14715,13	-84,69	3000,00	659,62	14,00	9,61
2i	1800,00	6,92	14715,13	-84,69	3000,00	659,62	8,00	16,81
3s	1800,00	1,92	14715,13	-23,52	3000,00	836,54	8,00	21,32
3i	1800,00	1,92	14715,13	-23,52	3000,00	836,54	10,00	17,05
Ln	1800,00	0,00	14715,13	0,00	3000,00	855,03	10,00	17,43
4	1800,00	13,08	14715,13	159,96	3000,00	0,00	10,00	0,00



Ejemplo 3

Sea la viga mostrada en la figura. Dimensionar la sección de la misma con las máximas solicitaciones.



Solución:

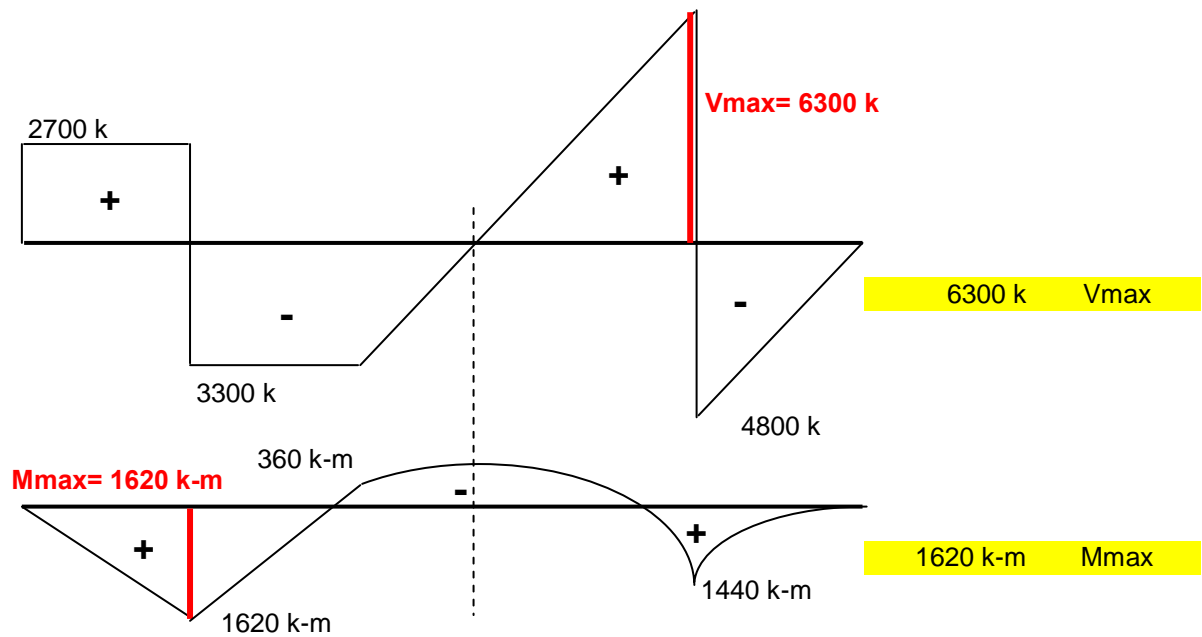
(a) Cálculo de solicitaciones máximas

• Cálculo de reacciones

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6000 * 0.6 - 8000 * 1.8 * 2.1 + R_b * 2.4 = 0 \Rightarrow R_b = 11100.00 \text{ k} \downarrow$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow R_a - 6000 + 8000 * 1.8 - 11100 = 0 \Rightarrow R_a = 2700.00 \text{ k} \uparrow$$

• Diagramas Q y M



(b) Geometría de las masas

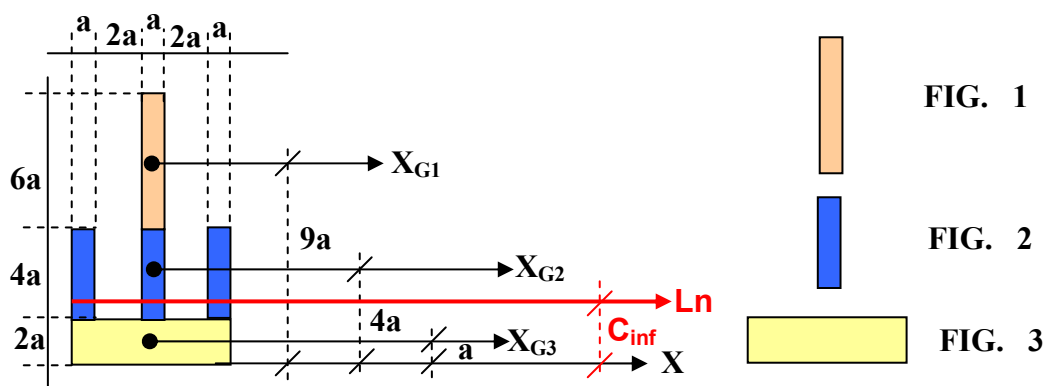
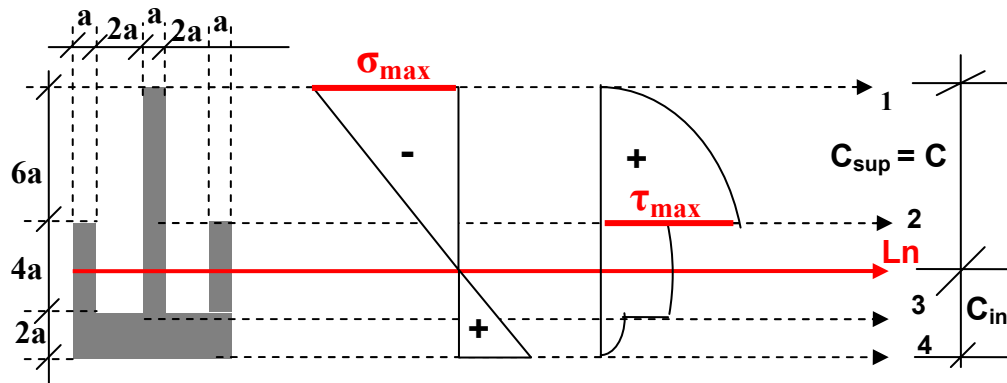


FIGURA	b_i	h_i	A_i	Y_i	$A_i \cdot Y_i$	I_{Gi}	$A_i d_i^2$
1	1.00	6.00	6.00	9.00	54.00	18.00	173.34
2	3.00	4.00	12.00	4.00	48.00	16.00	1.69
3	7.00	2.00	14.00	1.00	14.00	4.67	96.47
Σ		12.00	32.00		116.00	38.67	271.50

$$C_{inf} = 3.63 a$$

$$C_{sup} = 8.38 a$$

$$I_{Ln} = 310.17 a^4$$



(c) Dimensionamiento

(c1) Por Flexión

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{adm}} = \frac{M_{\max} * C}{I_{Ln}} = \frac{M_{\max} * 8.38a}{310a^4} \Rightarrow a_{\sigma} = \sqrt[3]{\frac{M_{\max} * 8.38}{310 * \sigma_{\text{adm}}}}$$

$$a_{\sigma} = \sqrt[3]{\frac{162000 * 8.38}{310 * 900}} \Rightarrow a_{\sigma} = 1.69 \text{ cm.}$$

(c2) Por Corte

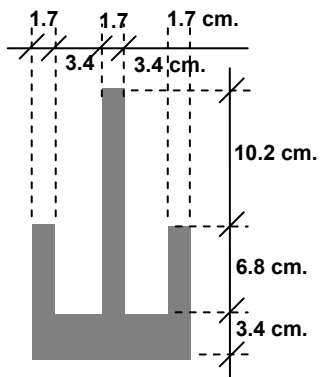
$$\tau_{\max} = \tau_{\text{adm}} = \frac{V_{\max} * M_{e,2}}{I_{Ln} * b_2} = \frac{V_{\max} * ((a * 6a) * (8.38a - 3a))}{310a^4 * a} \Rightarrow a_{\tau} = \sqrt{\frac{V_{\max} * 32.28}{310 * \tau_{\text{adm}}}}$$

$$a_{\tau} = \sqrt{\frac{6300 * 32.28}{310 * 300}} \Rightarrow a_{\tau} = 1.48 \text{ cm.}$$

Se escoge el mayor valor de “a” de tal forma que la sección sea capaz de soportar los dos

esfuerzos, ósea $a \geq a_{\sigma}, a_{\tau} \Rightarrow$

$$a = 1.69 \text{ cm.} \approx 1.70 \text{ cm.}$$



SECCIÓN VIGA

Ejemplo 4

Sea la viga mostrada en la figura. Determinar la P_{\max} capaz de soportar la sección

